

Title	曲面ノ漸近曲線ニ就イテ
Author(s)	金原, 誠
Citation	全国紙上数学談話会. 83 p.1-p.8
Issue Date	1936-03-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74289
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

366. 曲面ノ漸近曲線ニ就イテ

金 原 誠 (旅順工大)

射影微分幾何ノ立場デ、漸近曲線ノ空間曲線トシテノ性質ト曲面ノ理論トノ關係ヲ調ベル、が此ノ *article*ノ目的デス、此ノ考ヘデ *l'arête de green*ノ新シイ性質ヲ導キ、一ニノ射影的不変量ニ幾何學的意味ヲ與ヘ、又 *Segre*切線及ビ *Darboux*切線ノ一ツノ新シイ *construction*ヲ示シマス。

1. 曲面 S (*non réglée*) 上ノ1点 x ガソノ *asymptotiques* u, v = ヨツテ表ハサレテキ $\rho \in$ ノトスレバ x ノ *coordonnées projectives homogènes* ハ次ノ聯立偏微分方程式ヲ満足シマス。^(註1)

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + \rho_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + \rho_{22} x. \end{cases}$$

今

$$\begin{cases} x = x, \\ x_1 = x_u + \lambda x, \\ x_2 = x_v + \mu x, \\ x_3 = x_{uv} + \mu x_u + \lambda x_v + \rho x, \end{cases}$$

但シ

$$\left| \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_u}{\rho} - \theta_u \right) \right.$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma_v}{\gamma} - \theta_v \right), \\ \lambda \mu - \rho = \frac{1}{2} (\beta \gamma + \theta_{uv}) \end{cases}$$

ト置ケバ, x, x_1, x_2, x_3 ヲ頂点トスル repère ハ漸近切線ト第1種及第2種, *l'arête de Green* ヲ稜トシ, 且ツ x_3 ハ Lie 点ニナリマス. 更ニ

$$\begin{cases} L = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta_u^2 - \beta \theta_v - \beta_v - 2\rho_u, \\ M = \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta_v^2 - \gamma \theta_u - \gamma_u - 2\rho_v, \\ \mathcal{L} = 2L - (\log \beta)_{uu} + \frac{1}{4} (\log \beta)_u^2, \\ \mathcal{M} = 2M - (\log \gamma)_{vv} + \frac{1}{4} (\log \gamma)_v^2, \\ \mathcal{L}_1 = 2L + 2(\log \gamma)_{uv} + (\log \gamma)_u^2, \\ \mathcal{M}_1 = 2M + 2(\log \beta)_{uv} + (\log \beta)_v^2 \end{cases}$$

ト置ケバ $\mathcal{L} du^2 + \mathcal{M} dv^2$ 及ビ $\mathcal{L}_1 du^2 + \mathcal{M}_1 dv^2$ ハ ⁽²⁾*invariante et intrinsèque* ナリ, 且ツ (1) = ヲツテ次ノ關係ヲ得マス.

$$(2) \begin{cases} x_u = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_u}{\beta} - \theta_u \right) x + x_1, \\ (x_1)_u = -\frac{1}{4} \left\{ \mathcal{L} + \beta (\log \beta^2 \gamma)_v \right\} x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_u}{\beta} + \theta_u \right) x_1 + \beta x_2, \\ (x_2)_u = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\log \gamma)_{uv} + \beta \gamma \right\} x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\beta_u}{\beta} - \theta_u \right) x_2 + x_3, \\ (x_3)_u = -\frac{\beta}{4} \left\{ \mathcal{M}_1 + \frac{1}{4} (\log \beta^2 \gamma)_v^2 \right\} x + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\log \gamma)_{uv} + \beta \gamma \right\} x_1 \end{cases}$$

$$\left| -\frac{1}{4}\{L - \beta(\log \beta^2 \gamma)_v\}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta} + \theta_u\right)x_3.\right.$$

点 x ヲ通ル *ligne asymptotique* $v = \text{const.}$ 上, 任意
 1 点, 此, *repère* = 関スル *coordonnées non ho-*
mogènes ヲ x^1, x^2, x^3 トスレバ $v = \text{const.}$ 方程式
 ハ (2) = ヨツテ

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{\beta}{2}(x^1)^2 - \frac{\beta}{24}\{L + \frac{\beta}{2}(\log \beta^2 \gamma)_v\}(x^1)^4 + \dots, \\ x^3 = \frac{\beta}{6}(x^1)^3 - \frac{\beta}{40}\{L + \frac{5}{6}\beta(\log \beta^2 \gamma)_v\}(x^1)^5 + \dots \end{cases}$$

トナリマス。

2. *ligne asymptotique* $v = \text{const.}$ 1 点カヲ
 ヒイタ切線 = ヨツテ作ラレル *développable asympto-*
tique ヲ D , ト名付ケルト, D , ト x = 於ケル曲面ノ切平面
 トノ交リノ曲線ハ (3) = ヨツテ

$$(4) \quad x^2 = \frac{3}{8}\beta(x^1)^2 - \frac{9}{640}\beta\{L + \frac{5}{2}\beta(\log \beta^2 \gamma)_v\}(x^1)^4 + \dots$$

トナリ, 点 x = 於ケル \vee , *conique osculatrice* ハ

$$(5) \quad x^2 = \frac{3}{8}\beta(x^1)^2 - \frac{1}{10}\left\{\frac{L}{\beta} + \frac{5}{2}(\log \beta^2 \gamma)_v\right\}(x^1)^2$$

トナリマス。此, *conique* ト xx_2 トノ交点ハ x 自身ト

$$x_2 - \frac{1}{10}\left\{\frac{L}{\beta} + \frac{5}{2}(\log \beta^2 \gamma)_v\right\}x$$

トデアツテ、コノ最後ノ点ト x , トヲムスガ直線ハ蘇步青氏
 (註3)
 ノ定理 = ヨツテ、上ノ *conique* ノ切線 = ナツテナリマス。

コノ切線ヲ t , ト名付ケルコトニシマス、点 x = 於ケル D ,
 , *complexe osculateur* = 関シテ此ノ切線 t , = 共
 軛ナ直線ハ x ト

$$x_3 + \frac{1}{10} \left\{ \frac{L}{\beta} - \frac{5}{2} (\log \beta^2 \gamma)_v \right\} x,$$

トヲムスガ直線デス、此ノ直線ヲ S , ト名付ケルコトニシマ
 スト次ノ *proposition* ヲ得マス。

“*Développable asymptotique* D , ト切平面ト
 ノ交ハリノ曲線ノ点 x = 於ケル *conique osculatrice*
 が漸近切線 xx_2 ト交ハツタ点 = 於テ *conique* = ヒイタ
 切線ヲ t , トシ, D , ノ *complexe osculateur* = 関
 シテ t , ト共軛ナ直線ヲ S , トスレバ, S , ト漸近切線 xx , ト = ヨ
 ッテ定メラレル平面ハ第1種ノ *l'arête de green* ヲ通
 ル。”

Ligne asymptotique $u = \text{const.}$ ノ各点 = 於ケ
 ル切線 = ヨッテ作ラシム *développable asymptoti-*
que. D_2 = 関シテモ同様ナコトが成立チマスカラ此ノ定理 =
 ヨッテ第1種ノ *l'arête de green* ヲ決定スルコトが出来
 マス。尚ホ次ノ *proposition* モ容易ニ証明出来マス。

“ t , ト S , トが点 x = 於ケル *darboux* 二次面 = 関
 シテ共軛ナルヌメ = 必要 = シテ且ツ充分ナル條件ハ $L=0$ デ
 アツテ, コノ場合 = 限リ t , ト xx_2 トノ交点ハ第2種ノ
Directrice de Wilczynski 上 = マル。”

$\mathcal{M} = 0$ トイフコトノ幾何學的意味モ全ク同様デス。

3. 今 $\sigma = \beta^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\theta}$ トシ

$$\begin{cases} y = \sigma x, \\ y_1 = \sigma x_1, \\ y_2 = -\frac{1}{10} \left\{ \mathcal{L} + \frac{5}{2} \beta (\log \beta^2 r)_v \right\} \sigma x + \sigma \beta x_2, \\ y_3 = \tau \sigma x + \frac{1}{10} \left\{ \mathcal{L} - \frac{5}{2} \beta (\log \beta^2 r)_v \right\} \sigma x_1 + \sigma \beta x_3 \end{cases}$$

ト置フ、但シコトニテハ y_3 ガ S_1 上ノ point de coincidence^(註4) ナルヲ取ルコトニシマス、然レトキハ(2)
= ヨツテ次ノ基本方程式ヲ得マス。

$$(6) \begin{cases} y_u = y_1, \\ (y_1)_u = -\frac{3}{20} \mathcal{L} y + \frac{1}{2} \frac{\beta_u}{\beta} y_1 + y_2, \\ (y_2)_u = \nu_1 y - \frac{1}{5} \mathcal{L} y_1 + \frac{\beta_u}{\beta} y_2 + y_3, \\ (y_3)_u = \rho_1 y + \nu_1 y_1 - \frac{3}{20} \mathcal{L} y_2 + \frac{3}{2} \frac{\beta_u}{\beta} y_3. \end{cases}$$

où

$$(7) \begin{cases} \nu_1 = \frac{\beta}{2} \{ \beta r - (\log \beta)_{uv} \} \\ \rho_1 = \frac{\beta}{20} \left[\frac{\beta_u}{\beta} \left(\frac{\mathcal{L}}{\beta} \right)_u - 2 \left(\frac{\mathcal{L}}{\beta} \right)_{uu} - \frac{4}{5} \beta \left(\frac{\mathcal{L}}{\beta} \right)^2 - 5 \beta \mathcal{M} \right] \end{cases}$$

$\nu_1 du^3$ 及 $\rho_1 du^*$ ハ invariants et intrinsèques
デアツテ蟹谷教授ニヨツテ夫々曲線ノ第1種及第2種ノ射
影的線元素ト呼バレテキルモノデス。^(註5)

y, y_1, y_2, y_3 を頂点とする *repère* = 関シテハ漸近
曲線 $v = \text{const.}$ の方程式ハ

$$(8) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{y_1}{60}(x')^5 + \frac{1}{360} \left(\frac{\partial y_1}{\partial u} - \frac{3}{2} \frac{\beta_u}{\beta} y_1 + 5\beta_1 \right) (x')^6 + \dots, \\ x^3 = \frac{1}{6}(x')^3 + \frac{y_1}{60}(x')^6 + \frac{1}{2520} \left\{ 7 \left(\frac{\partial y_1}{\partial u} - \frac{3}{2} \frac{\beta_u}{\beta} y_1 \right) + 25\beta_1 \right\} (x')^7 + \dots \end{cases}$$

トナリマス。漸近曲線 $u = \text{const.}$ の第1種及ビ第2種、
射影的線元素ヲ夫々 $\nu_2 dv^3, \beta_2 dv^4$ トスレバ ν_2 及ビ β_2
ハ (7) ト類似ノ式ニナリマス。

D_1 が *un complexe linéaire* = 属スル條件ハ
 $\nu_1 = 0$ デスカラ、今ノ場合ニハ

$$(\log \beta)_{uv} = \beta \gamma$$

トナリマス、コレハヨク知ラレタ結果デス。尚コノ場合ニ限
リ第2種元素 β_1 が u, v ノ函数トナリマス。

$$\text{特ニ} \quad \nu_1 = \nu_2 = \mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_1 = 0$$

トイフ場合ヲ考ヘルト、カヌウナ曲面ハ

凡テノ漸近曲線が3次曲線デ且ツ曲率 $-\frac{1}{2}$ ナル *Fubini* 曲
面ニナリマス、從ツテ此ノ曲面ハ ∞^3 ノ曲面ニ射影的ニ變形
スルコトが出來マス。

4. 始メノ *repère* = 戻ツテ *repère* ノ第四番面
 x_1, x_2, x_3 ト D_1 トノ交ハリノ曲線ヲ考ヘマス。コノ平面上ノ
点ヲ $\xi^1 x_1 + \xi^2 x_2 + \xi^3 x_3$ デ表ハスコトニシテ $\zeta^1 = \frac{\xi^2}{\xi^1}, \zeta^2 = \frac{\xi^3}{\xi^1}$

トオケバ曲線ノ方程式ハ (3) = ヨツヲ

$$(9) \quad \zeta^2 - \frac{1}{2\beta}(\zeta')^2 + \frac{1}{24\beta^2} \left\{ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}(\log \beta^2 \gamma)_v \right\} (\zeta')^4 + \dots$$

トナリマス。 x_1 = 於テコレト3次ノ切触ヲナレ、且ツ x_3 = 於テ $x_2 x_3$ = 切スル conique ハ

$$(10) \quad (\xi^2)^2 - 2\beta \xi' \xi^3 = 0$$

同様 = D_2 ト $x_1 x_2 x_3$ トノ交リノ曲線カヲ conique

$$(11) \quad (\xi')^2 - 2\gamma \xi^2 \xi^3 = 0$$

ヲ得マス。(10) ト (11) トノ4ツノ交点ヲ通ル3對ノ直線ハ

$$\begin{cases} \gamma^{\frac{1}{3}} \xi^2 - \beta^{\frac{1}{3}} \xi' = 0, \\ \gamma^{\frac{1}{3}} \xi^2 + \beta^{\frac{1}{3}} \xi' + 2\beta^{\frac{2}{3}} \gamma^{\frac{2}{3}} \xi^3 = 0 \end{cases} \quad \text{etc. etc.}$$

ヨツヲ次ノ proposition ヲ得マス。

“ (10) ト (11) , 2 coniques , 4ツノ交点ヲ通ル3對ノ直線ガ切平面ト交ハツタ点ヲ点 x トムスヅバ Segre 切線及ビ Darboux 切線ヲ得ル。”

註1. G. Fubini - E. Čech, *geometria proiettiva differenziale*, T. I, p. 90.

2. *Ibid.* p. 96.

3. B. Su, on the intersection of two curves in space, (東北叢誌, V. 39, 1934, p. 226-232.).

4.5. J. Kanitani, sur les repères mobiles attachés

à une courbe gauche, (Mem. Ryo. Coll. Eng.,
V. 6, 1933, p. 91-113.).